Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра высшей математики

Андрианов Павел Андреевич

Магистерская диссертация

Изучение нестационарных базисов и фреймов всплесков

Направление 01.04.02
Прикладная математика и информатика
Магистерская программа Прикладная математика и информатика в задачах цифрового управления

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Скопина М. А.

Санкт-Петербург
2017

Оглавление

Введение

Коротко о всплесках

Теория всплесков лежит на пересечении чистой математики, вычислительное математики, а также проблематики аудио- и графической обработки сигналов, сжатия и передачи информации.

Под системами всплесков обычно понимают сжатия и сдвиги одной функции, образующие систему представления в каком-либо смысле (например, базис в $L_2(\mathbb{R})$). В некоторых ситуациях системы всплесков состоят из сдвигов и сжатий нескольких функций или целой последовательности. Понятие «всплеск» как таковое не вводится, конкретный смысл придаётся таким словосочетаниям, как «всплеск-функция», «последовательность всплеск-функций», «пространство всплесков» и т.п.

Интерес к изучению систем всплесков возник задолго до появления терминологии и создания основ теории и был обусловлен главным образом потребностью в их использовании для обработки сигналов. В связи с этими задачами всплеск-анализ сформировался (в определённом смысле как альтернатива классическому анализу Фурье) в конце 80-х - начале 90-х годов XX века в работах С. Малла, Й. Мейера, П. Ж. Лемарье, И. Добеши и др. Базисы всплесков имеют ряд преимуществ по сравнению с другими базисами, используемыми в качестве аппарата приближения функций. Они обладают так называемой время-частотной локализацией, т.е. быстро убывают на бесконечности как сами базисные функции, так и их преобразования Фурье. Благодаря этому свойству при разложении по базису сигналов, частотные характеристики которых меняются по времени или по пространству (таковыми являются, в частности, речевые или музыкальные сигналы, сейсмические сигналы, а также изображения), много коэффициентов разложения при ненужных на данном пространственном или временном участке гармониках оказываются малыми и могут быть отброшены, что обеспечивает тем самым сжатие информации. Допустимость такого отбрасывания объясняется другим важным свойством: всплеск-разложения являются безусловно сходящимися рядами. Кроме того, существуют эффективные алгоритмы, позволяющие быстро вычислять коэффициенты всплеск-разложений. Всё это привлекает многочисленных специалистов в самых различных областях прикладной и инженерной математики к использованию всплесков. С другой стороны, системы всплесков оказались полезными для решения некоторых задач теории функций и функционального анализа. Таким образом, всплески дают тот редкий пример, когда теория и её практическая реализация развиваются параллельно.

Толчком к развитию математической теории всплесков послужили базовые работы Й. Мейера и С. Малла, в которых было введено понятие кратномасштабного анализа, описан метод его построения по данной (подходящей) функции и найдены явные формулы для нахождения соответствующей всплеск-функции, сдвиги и сжатия которой образуют ортонормированный базис. Благодаря этой теории было найдено много примеров систем всплесков, у которых базисные функции являются гладкими и обладают хорошей время-частотной локализацией, в частности, гладкие всплески с компактным носителем. Как раз такие примеры и требовались для приложений.

О настоящей работе

Как было сказано выше, в теории всплесков рассматриваются также системы представления, которые специальным образом строятся по последовательности всплеск-функций. Такие системы получили название «нестационарные системы всплесков». Для них получены аналоги понятия кратномасштабного анализа и методов построения систем представления. В частности, такие системы естественным образом возникают при рассмотрении систем всплесков в периодическом случае (например, в $L_2(\mathbb{T})$), которые и являются предметом изучения в данной работе.

В силу обширности терминологического словаря теории всплесков, вместо введения множества основных понятий автор считает необходимым сослаться на несколько работ, в которых все эти понятия вводятся и подробно описываются. Таким образом, для непериодического случая строгие определения кратномасштабного анализа, масштабирующей функции, её маски, пространств всплесков, всплеск-функции и других понятий, классических для теории всплесков, могут быть найдены, например, в книгах [1], [2]. Для периодического случая эти определения будут даны непосредственно в тексте диссертации.

Стоит отметить, что существуют разные подходы к построению аналога структуры кратномасштабного анализа в периодическом случае. В данной работе автор взял за основу подход, описанный в статье [3].

Постановка задачи

В книге [1, §3.1] описан результат, устанавливающий достаточные условия фреймовости непериодических систем всплесков. Условия накладываются на преобразования Фурье масштабирующих функций, а также на маски всплесков.
Задача состоит в том, чтобы получить аналог этого результата в периодическом случае, а также предоставить нетривиальные примеры периодических двойственных фреймов всплесков, не являющиеся периодизацией непериодических систем.

Обзор литературы

Существует множество подходов к определению периодического кратномасштабного анализа (далее, для краткости, ПКМА). Например, в фундаментальных монографиях [4], [5] периодические всплески определяются как периодизация непериодических всплесков. Однако, такой подход к периодическим объектам не очень естественен, тем более, что не все системы, «заслуживающие» называться системами всплесков, подходят под такое определение. В связи с этим, многие авторы (см., например, [6], [7], [8]) предлагали различные варианты определения ПКМА. В данной работе за основу взят подход, описанный в статье [3], и, позднее, более подробно в книге [2].
Насколько известно автору, для такого определения ПКМА ранее не рассматривались достаточные условия фреймовости для биортогональных систем в терминах коэффициентов Фурье масштабирующих функций. Тем не менее, есть множество работ, очень близких по тематике, в которых получены результаты для жёстких фреймов всплесков, изучалась связь непериодических систем всплесков и их периодизаций, или были построены в явном виде системы функций, удовлетворяющие условиям масштабирующей последовательности ПКМА (см., например, [9], [10], [11]).

Глава 1

Обозначения и предварительные сведения

Через $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ будем обозначать множества целых, неотрицательных целых, вещественных и комплексных чисел соответственно, $\mathbb{T} = [0,1)$ – единичный тор, $\widehat{f}(k) = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dt$ – k-ый коэффициент Фурье 1-периодической функции f, $\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi ixt}dt$ – преобразование Фурье функции $g \in L_2(\mathbb{R})$, $\langle a,b\rangle = \int f\overline{g}$, $\mathcal{S}(j) = \{k \in \mathbb{Z}_+ : k \leqslant 2^j - 1\}$. Если для определённого $j \in \mathbb{Z}$ функция $\varphi_j \in L_2(\mathbb{T})$, то $\varphi_{jk} := \varphi_j(\cdot + k2^{-j})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приведём ряд базовых определений и утверждений. Доказательства утверждений могут быть найдены в книге [2, гл. 9].

Определение 1. *Пусть $V_j \subset L_2(\mathbb{T})$, для любого $j \in \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что совокупность $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ является* периодическим кратномасштабным анализом *в $L_2(\mathbb{T})$, если $\forall j \in \mathbb{Z}_+$ выполнены следующие свойства (аксиомы):*

MR1. $V_j \subset V_{j+1}$;

MR2. $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L_2(\mathbb{T})$;

MR3. $\dim V_j = 2^j$;

MR4. $\dim\{f \in V_j : f(\cdot + n2^{-j}) = \lambda_n f \ \forall n \in \mathbb{Z}\} \leqslant 1$ *для любого набора комплексных чисел* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$;

MR5. $f \in V_j \Leftrightarrow f(\cdot + n2^{-j}) \in V_j$ *для всех* $n \in \mathbb{Z}$;

MR6. $f \in V_j \Rightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1}$ *и* $f \in V_{j+1} \Rightarrow f(\cdot/2) + f((\cdot+1)/2) \in V_j$.

Определение 2. *Последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset L_2(\mathbb{T})$ называется масштабирующей последовательностью некоторого ПКМА тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

Ф1. $\widehat{\varphi_0}(k) = 0$ *для всех* $k \neq 0$;

Ф2. $\forall j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathcal{S}(j)$ *существует* $m \in \mathbb{Z} : \widehat{\varphi_j}(2^j m + k) \neq 0$;

Ф3. $\forall k \in \mathbb{Z}$ *существует* $j \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$;

Ф4. $\forall j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$ *существует* $\gamma_k^j \neq 0 : \forall m \ \gamma_k^j \widehat{\varphi_j}(2^j m + k) = \widehat{\varphi_{j+1}}(2(2^j m + k))$;

Ф5. $\forall j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$ *существует* $\mu_k^j \in \mathbb{C} : \forall m \ \widehat{\varphi_j}(2^{j+1} m + k) = \mu_k^{j+1} \widehat{\varphi_{j+1}}(2^{j+1} m + k)$.

Отметим, что в определении 2 последовательности чисел $\{\gamma_k^j\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{\mu_k^j\}_{k\in\mathbb{Z}}$ являются 2^j-периодическими по k для любого $j \in \mathbb{Z}_+$.

Определение 3. *Последовательность чисел $\{\mu_k^j\}_{k\in\mathbb{Z}}$ будем называть* маской *соответствующей масштабирующей последовательности.*

Определение 4. *Будем называть ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$* порождённым *масштабирующей последовательностью $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, если*

$$\forall j \quad V_j = span\{\varphi_j(\cdot + 2^{-j}k), k \in \mathcal{S}(j)\}.$$

Утверждение 1. *В любом ПКМА существует масштабирующая последовательность.*

В силу утверждения 1, в данной работе построение ПКМА автор начинает с нахождения подходящей последовательности функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, порождающих некоторый ПКМА. Соответственно, все результаты сформулированы в терминах условий на коэффициенты Фурье функций φ_j.

Определение 5. *Пусть H – гильбертово пространство. Система функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ называется* фреймом *в H с постоянными $A, B > 0$, если*

$$\forall f \in H \quad A\|f\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2. \tag{1.1}$$

Утверждение 2. *Если системы функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ биортогональны, и одна из них является фреймом, то обе они являются базисами Рисса.*

Определение 6. *Два фрейма $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ в H называются* двойственными*, если*

$$\forall f, g \in H \quad \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n\rangle\langle f_n, g\rangle = \langle f, g\rangle. \tag{1.2}$$

Определение 7. *Если в определении 5 выполняется только правая часть неравенства 1.1, то такая система функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется* бесселевой.

Утверждение 3. *Две масштабирующие последовательности $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ являются биортогональными тогда и только тогда, когда*

$$\forall j, m \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi_j}(2^j n + m)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(2^j n + m)} = 2^{-j}. \tag{1.3}$$

Глава 2

Основное содержание работы

2.1. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть* $f, g, \varphi_j, \widetilde{\varphi}_j \in L_2(\mathbb{T})\ \forall j \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \varphi_{jk}\rangle \langle \widetilde{\varphi}_{jk}, g\rangle = \sum_{m=0}^{2^j-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j n + m) 2^{j/2} \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j n + m)} \overline{\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(2^j n' + m) 2^{j/2} \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}}(2^j n' + m)}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Для начала заметим, что

$$\widehat{\varphi_{jk}}(l) = \widehat{\varphi_j}(l) e^{2\pi i 2^{-j} kl}.$$

Используя обобщённое равенство Парсеваля, имеем

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \varphi_{jk}\rangle \langle \widetilde{\varphi}_{jk}, g\rangle = \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(l) \overline{\widehat{\varphi_j}(l) e^{2\pi i 2^{-j} kl}} \overline{\sum_{l'\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(l') \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}}(l') e^{2\pi i 2^{-j} kl'}}$$

Заменим переменные суммирования $l = 2^j n + m$, $l' = 2^j n' + m'$ и используем $2\pi i$-периодичность экспонент:

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(l) \overline{\widehat{\varphi_j}(l) e^{2\pi i 2^{-j} kl}} \overline{\sum_{l'\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(l') \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}}(l') e^{2\pi i 2^{-j} kl'}} = \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{2^j-1} \widehat{f}(2^j n + m) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j n + m) e^{2\pi i 2^{-j} km}} \cdot$$

$$\cdot \overline{\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \sum_{m'=0}^{2^j-1} \widehat{g}(2^j n' + m') \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}}(2^j n' + m') e^{2\pi i 2^{-j} km'}} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{2^j-1} \sum_{n'\in\mathbb{Z}} \sum_{m'=0}^{2^j-1} \widehat{f}(2^j n + m) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j n + m)} \overline{\widehat{g}(2^j n' + m') \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}}(2^j n' + m')} \sum_{k=0}^{2^j-1} \overline{e^{2\pi i 2^{-j} km}} e^{2\pi i 2^{-j} km'}.$$

Рассмотрим последний множитель в сумме:

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \overline{e^{2\pi i 2^{-j} km}} e^{2\pi i 2^{-j} km'} = \sum_{k=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} k(m'-m)} = 2^j \delta_{m',m},$$

где $\delta_{m',m}$ обозначает символ Кронекера. Таким образом, в общей сумме все слагаемые с $m \neq m'$ обнуляются, и в итоге мы получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $f, g, \varphi_j, \widetilde{\varphi}_j \in L_2(\mathbb{T})$ $\forall j \in \mathbb{Z}_+$, *тогда*

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \langle \widetilde{\varphi}_{jk}, g \rangle = 2^j \Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) \overline{\widehat{g}(m)} \widehat{\widetilde{\varphi}_j}(m) \overline{\widehat{\varphi_j}(m)} + R_j \Big), \tag{2.2}$$

где

$$R_j = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{n' \in \mathbb{Z} \\ n' \neq 0}} \widehat{f}(m) \overline{\widehat{g}(2^j n' + m)} \widehat{\widetilde{\varphi}_j}(2^j n' + m) \overline{\widehat{\varphi_j}(m)}.$$

Доказательство. Используя лемму 1 и заменяя переменную суммирования, получим

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \langle \widetilde{\varphi}_{jk}, g \rangle = 2^j \sum_{m=0}^{2^j-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j n + m) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j n + m)} \overline{\sum_{n' \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(2^j n' + m) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(2^j n' + m)}} =$$

$$= 2^j \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) \overline{\widehat{\varphi_j}(m)} \overline{\sum_{n' \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(2^j n' + m) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(2^j n' + m)}}.$$

Осталось извлечь из последней суммы слагаемое с $n' = 0$, и мы получим утверждение леммы. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $f, g, \varphi_j, \widetilde{\varphi}_j \in L_2(\mathbb{T})$ $\forall j \in \mathbb{Z}_+$, *и выполняются условия*

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \left| \sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \langle \widetilde{\varphi}_{jk}, g \rangle \right| \leqslant C \|f\| \|g\|, \tag{2.3}$$

$$\forall k \quad \lim_{j \to \infty} 2^j \widehat{\varphi_j}(k) \widehat{\widetilde{\varphi}_j}(k) = 1. \tag{2.4}$$

Тогда

$$\lim_{j \to \infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \langle \widetilde{\varphi}_{jk}, g \rangle = \langle f, g \rangle. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ – тригонометрические полиномы. Применим лемму 2:

$$\lim_{j \to \infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \langle \widetilde{f}, \varphi_{jk} \rangle \langle \widetilde{\varphi}_{jk}, \widetilde{g} \rangle = \lim_{j \to \infty} 2^j \Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{\widetilde{f}}(m) \overline{\widehat{\widetilde{g}}(m)} \widehat{\widetilde{\varphi}_j}(m) \overline{\widehat{\varphi_j}(m)} + R_j \Big),$$

где R_j – соответствующее выражение для $\widetilde{f}, \widetilde{g}$. Заметим, что так как $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ – тригонометрические полиномы, то есть коэффициентов Фурье у них конечное количество, то при достаточно большом j все слагаемые в выражении R_j будут равны 0. Учитывая выполнение условия (2.4) и используя обобщённое равенство Парсеваля, мы получаем равенство (2.5) для тригонометрических полиномов.

Множество тригонометрических полиномов плотно в $L_2(\mathbb{T})$, значит для любого $\varepsilon > 0$ существует $\widetilde{f}$, такой, что $\|f - \widetilde{f}\| < \varepsilon$. Выберем $\varepsilon > 0$ и соответствующий полином $\widetilde{f}$ и рассмотрим выражение:

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\langle f,\varphi_{jk}\rangle\langle\widetilde{\varphi}_{jk},\widetilde{g}\rangle=\lim_{j\to\infty}\big(\sum_{k=0}^{2^j-1}\langle\widetilde{f},\varphi_{jk}\rangle\langle\widetilde{\varphi}_{jk},\widetilde{g}\rangle+\sum_{k=0}^{2^j-1}\langle f-\widetilde{f},\varphi_{jk}\rangle\langle\widetilde{\varphi}_{jk},\widetilde{g}\rangle\big). \tag{2.6}$$

По условию (2.3)

$$\big|\sum_{k=0}^{2^j-1}\langle f-\widetilde{f},\varphi_{jk}\rangle\langle\widetilde{\varphi}_{jk},\widetilde{g}\rangle\big|\leqslant C\|g\|\|f-\widetilde{f}\|. \tag{2.7}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ в выражении (2.6) и учитывая неравенство (2.7) и непрерывность скалярного произведения, получаем

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\langle f,\varphi_{jk}\rangle\langle\widetilde{\varphi}_{jk},\widetilde{g}\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{j\to\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\langle\widetilde{f},\varphi_{jk}\rangle\langle\widetilde{\varphi}_{jk},\widetilde{g}\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\langle\widetilde{f},\widetilde{g}\rangle=\langle f,\widetilde{g}\rangle.$$

Аналогичным образом заменив $\widetilde{g}$ на g, получим утверждение леммы. □

2.2. Результаты

Основные теоремы.

Теорема 1. *Пусть ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ порождены масштабирующими последовательностями $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$, чьи маски удовлетворяют условию*

$$\forall j\forall m\quad \mu_m^j\overline{\widetilde{\mu}_m^j}+\mu_{m+2^{j-1}}^j\overline{\widetilde{\mu}_{m+2^{j-1}}^j}=2, \tag{2.8}$$

а коэффициенты Фурье условию

$$\forall m\quad \lim_{j\to\infty}2^j\widehat{\varphi_j}(m)\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(m)=1.$$

Положим

$$\widehat{\psi_j}(m)=e^{\pi i2^{-j}m}\overline{\widetilde{\mu}_{m+2^j}^{j+1}}\widehat{\varphi_{j+1}}(m), \tag{2.9}$$
$$\widehat{\widetilde{\psi}_j}(m)=e^{\pi i2^{-j}m}\overline{\mu_{m+2^j}^{j+1}}\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(m). \tag{2.10}$$

Тогда, если системы $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$ бесселевы, то они являются двойственными фреймами.

Доказательство. Для начала покажем, что для любых функций $f,g\in L_2(\mathbb{T})$ и чисел $j,j'\in\mathbb{Z}_+ : j<j'$ будет

$$\sum_{k=0}^{2^j-1}\langle f,\varphi_{jk}\rangle\langle\widetilde{\varphi}_{jk},g\rangle+\sum_{i=j}^{j'-1}\sum_{k=0}^{2^i-1}\langle f,\psi_{ik}\rangle\langle\widetilde{\psi}_{ik},g\rangle=\sum_{k=0}^{2^{j'}-1}\langle f,\varphi_{j'k}\rangle\langle\widetilde{\varphi}_{j'k},g\rangle \tag{2.11}$$

Очевидно, что достаточно показать для $j' = j+1$. Используя лемму 1, масштабирующее уравнение **Ф5** и формулы (2.9), (2.10), имеем:

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \langle \widetilde{\varphi}_{jk}, g \rangle + \sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \psi_{jk} \rangle \langle \widetilde{\psi}_{jk}, g \rangle =$$

$$= 2^j \sum_{m=0}^{2^j-1} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j n+m) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j n+m)} \sum_{n'\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{g}(2^j n'+m) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}_j(2^j n'+m)}} +$$

$$+ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j n+m) \overline{\widehat{\psi_j}(2^j n+m)} \sum_{n'\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{g}(2^j n'+m) \overline{\widehat{\widetilde{\psi}}_j(2^j n'+m)}} \Big) =$$

$$= 2^j \sum_{m=0}^{2^j-1} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j n+m) \overline{\mu^{j+1}_{m+2^j n} \widehat{\varphi_{j+1}}(2^j n+m)} \sum_{n'\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{g}(2^j n'+m) \overline{\widetilde{\mu}^{j+1}_{m+2^j n'} \widehat{\widetilde{\varphi}}_{j+1}(2^j n'+m)}} +$$

$$+ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j n+m) \overline{e^{\pi i 2^{-j}(2^j n+m)} \overline{\widetilde{\mu}^{j+1}_{2^j+(2^j n+m)}} \widehat{\varphi_{j+1}}(2^j n+m)} \cdot$$

$$\cdot \overline{\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(2^j n'+m) \overline{e^{\pi i 2^{-j}(2^j n'+m)} \overline{\mu^{j+1}_{2^j+(2^j n'+m)}} \widehat{\widetilde{\varphi}}_{j+1}(2^j n'+m)}} \Big).$$

Заметим, что при чётном n

$$\mu^{j+1}_{2^j n+m} = \mu^{j+1}_m, \quad e^{\pi i 2^{-j}(2^j n+m)} = e^{\pi i 2^{-j} m},$$

а при нечётном n

$$\mu^{j+1}_{2^j n+m} = \mu^{j+1}_{m+2^j}, \quad e^{\pi i 2^{-j}(2^j n+m)} = -e^{\pi i 2^{-j} m}.$$

Теперь разобьём каждую из сумм по n и n' ещё на две: по чётным n, n' и по нечётным. Такое разбиение позволит нам вынести преобразованные сомножители μ^j_k и $\widetilde{\mu}^j_k$ и экспоненты за пределы сумм. Заметим также, что экспоненты и вовсе сократятся, оставив после себя $+1$ и -1, так как комплексное сопряжение к ним применяется разное по чётности количество раз. Для краткости записи обозначим

$$\sigma_0 = \sum_{\substack{n=2k\\ k\in\mathbb{Z}}} \widehat{f}(2^j n+m) \overline{\widehat{\varphi_{j+1}}(2^j n+m)}, \quad \widetilde{\sigma}_0 = \sum_{\substack{n'=2k\\ k\in\mathbb{Z}}} \overline{\widehat{g}(2^j n'+m) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}_{j+1}(2^j n'+m)}},$$

$$\sigma_1 = \sum_{\substack{n=2k+1\\ k\in\mathbb{Z}}} \widehat{f}(2^j n+m) \overline{\widehat{\varphi_{j+1}}(2^j n+m)}, \quad \widetilde{\sigma}_1 = \sum_{\substack{n'=2k+1\\ k\in\mathbb{Z}}} \overline{\widehat{g}(2^j n'+m) \overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}_{j+1}(2^j n'+m)}},$$

и, используя эти обозначения и замечания выше, получим:

$$2^j \sum_{m=0}^{2^j-1} \Big((\overline{\mu_m^{j+1}}\sigma_0 + \overline{\mu_{m+2^j}^{j+1}}\sigma_1)(\widetilde{\mu}_m^{j+1}\widetilde{\sigma}_0 + \widetilde{\mu}_{m+2^j}^{j+1}\widetilde{\sigma}_1) + (\widetilde{\mu}_{m+2^j}^{j+1}\sigma_0 - \widetilde{\mu}_m^{j+1}\sigma_1)(\overline{\mu_{m+2^j}^{j+1}}\widetilde{\sigma}_0 - \overline{\mu_m^{j+1}}\widetilde{\sigma}_1) \Big) =$$

$$= 2^j \sum_{m=0}^{2^j-1} (\overline{\mu_m^{j+1}}\widetilde{\mu}_m^{j+1} + \overline{\mu_{m+2^j}^{j+1}}\widetilde{\mu}_{m+2^j}^{j+1})(\sigma_0\widetilde{\sigma}_0 + \sigma_1\widetilde{\sigma}_1). \qquad (2.12)$$

Первый сомножитель по условию (2.8) равен 2. Рассмотрим второй сомножитель:

$$\sigma_0\widetilde{\sigma}_0 + \sigma_1\widetilde{\sigma}_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2^{j+1}n+m)\overline{\widehat{\varphi_{j+1}}(2^{j+1}n+m)} \overline{\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(2^{j+1}n'+m)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(2^{j+1}n'+m)}} +$$

$$+ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2^{j+1}n+2^j+m)\overline{\widehat{\varphi_{j+1}}(2^{j+1}n+2^j+m)} \overline{\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(2^{j+1}n'+2^j+m)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(2^{j+1}n'+2^j+m)}}.$$

Подставив это выражение в (2.12), мы можем перегруппировать сумму по m:

$$2^{j+1} \sum_{m=0}^{2^j-1} (\sigma_0\widetilde{\sigma}_0 + \sigma_1\widetilde{\sigma}_1) = 2^{j+1} \sum_{m=0}^{2^{j+1}-1} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2^{j+1}n+m)\overline{\widehat{\varphi_{j+1}}(2^{j+1}n+m)} \cdot$$

$$\cdot \overline{\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(2^{j+1}n'+m)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(2^{j+1}n'+m)}} \Big).$$

Для доказательства (2.11) осталось применить лемму 1 ещё один раз.

Таким образом, для любой функции $\widetilde{f} \in V_{j'}$ справедливо равенство

$$\langle f, \varphi_0\rangle\langle\widetilde{\varphi}_0, g\rangle + \sum_{j=0}^{j'-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \psi_{ik}\rangle\langle\widetilde{\psi}_{ik}, g\rangle = \sum_{k=0}^{2^{j'}-1} \langle f, \varphi_{j'k}\rangle\langle\widetilde{\varphi}_{j'k}, g\rangle = \|\widetilde{f}\|^2.$$

В силу плотности $\bigcup_j V_j$ в $L_2(\mathbb{T})$ (свойство **MR2**), для любых $f \in L_2(\mathbb{T})$ и $\varepsilon > 0$ существуют $j' \in \mathbb{Z}_+$, $\widetilde{f} \in V_{j'} : \|f - \widetilde{f}\| < \varepsilon$. Кроме того, по условию теоремы, системы $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}\}_{j,k}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\} \cup \{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$ бесселевы, что означает:

$$\exists B, \widetilde{B} : \forall f \in L_2(\mathbb{T}) \quad |\langle f, \varphi_0\rangle|^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2,$$

$$|\langle f, \widetilde{\varphi}_0\rangle|^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} |\langle f, \widetilde{\psi}_{jk}\rangle|^2 \leqslant \widetilde{B}\|f\|^2.$$

Используя эти неравенства, неравенство Коши и неравенство треугольника, имеем:

$$\sqrt{|\langle f,\varphi_0\rangle|^2+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}|\langle f,\psi_{jk}\rangle|^2}\geqslant\sqrt{|\langle\widetilde{f},\varphi_0\rangle|^2+\sum_{j=0}^{j'-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}|\langle\widetilde{f},\psi_{jk}\rangle|^2}-\sqrt{B}\varepsilon\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\sqrt{\widetilde{B}}\|\widetilde{f}\|}\Big|\langle\widetilde{f},\varphi_0\rangle\langle\widetilde{\varphi}_0,\widetilde{f}\rangle+\sum_{j=0}^{j'-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\langle\widetilde{f},\psi_{jk}\rangle\langle\widetilde{\psi}_{jk},\widetilde{f}\rangle\Big|-\sqrt{B}\varepsilon=$$

$$=\frac{\|\widetilde{f}\|}{\sqrt{\widetilde{B}}}-\sqrt{B}\varepsilon\geqslant\frac{1}{\sqrt{\widetilde{B}}}(\|f\|-\varepsilon)-\sqrt{B}\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to\infty$, получаем оценку снизу. Оценка для системы $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$ получается аналогично. Таким образом, мы доказали фреймовость обеих систем.

Если в равенстве (2.11) положить $j=0$ и к левой части применить неравенство Коши, то мы получим выполнение условия (2.3) леммы 3. Выполнение условия (2.4) обеспечено условиями теоремы. Переходя к пределу при $j'\to\infty$ в (2.11) и применяя лемму 3, получаем

$$\langle f,\varphi_0\rangle\langle\widetilde{\varphi}_0,g\rangle+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^i-1}\langle f,\psi_{ik}\rangle\langle\widetilde{\psi}_{ik},g\rangle=\langle f,g\rangle,$$

что и означает двойственность фреймов $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$. □

Определение 8. *Системы функций $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$, где ψ_{jk} и $\widetilde{\psi}_{jk}$ определены как в теореме 1, будем называть системами всплеск-функций,* порождёнными *масштабирующими последовательностями $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$.*

Условия теоремы 1 включают бесселевость систем $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$, что является довольно сильным и ограничивающим условием. В следующей теореме дано достаточное условие бесселевости для некоторой системы функций $\{\psi_{jk}\}_{j,k}$. При этом стоит отметить, что добавление единственной функции $\varphi_0\in L_2(\mathbb{T})$ в такую систему не повлияет на её бесселевость.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты Фурье функций $\psi_j\in L_2(\mathbb{T})$, $j\in\mathbb{Z}_+$, удовлетворяют условию:*

$$\forall j\in\mathbb{Z}_+,l\in\mathbb{Z}\quad|2^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)|\leqslant\min\{C_1,C_2\Big(\frac{2^j}{|l|}\Big)^{\frac{1}{2}+\varepsilon},C_3\Big(\frac{|l|}{2^j}\Big)^{\alpha}\},\quad\varepsilon>0,\ \alpha\in[0,1].\qquad(2.13)$$

Тогда система $\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ бесселева.

Доказательство. Пусть $f\in L_2(\mathbb{T})$, $j\in\mathbb{Z}_+$. Выберем число $\delta\in(0;\frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon})$. Используем лемму 1 и неравенство Гёльдера:

$$\sum_{k=0}^{2^j-1}|\langle f,\psi_{jk}\rangle|^2=\sum_{m=0}^{2^j-1}|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(2^jn+m)2^{j/2}\overline{\widehat{\psi_j}(2^jn+m)}|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{2^j-1}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(2^jn+m)|^2|2^{j/2}\widehat{\psi_j}(2^jn+m)|^{2\delta}\Big)\Big(\sum_{n'\in\mathbb{Z}}|2^{j/2}\widehat{\psi_j}(2^jn'+m)|^{2(1-\delta)}\Big).\qquad(2.14)$$

Рассмотрим второй множитель в общей сумме. Для $n'=-1,0$ применим оценку с C_1. Для $n'\neq-1,0$ воспользуемся второй оценкой из (2.13):

$$|2^{j/2}\widehat{\psi_j}(2^jn'+m)|^{2(1-\delta)}\leqslant C_2^{2(1-\delta)}\Big(\frac{2^j}{|2^jn'+m|}\Big)^{2(1-\delta)(\frac{1}{2}+\varepsilon)}=C_2^{2(1-\delta)}\Big(\frac{1}{|n'+2^{-j}m|}\Big)^{2(1-\delta)(\frac{1}{2}+\varepsilon)}.$$

Для суммы получаем:

$$\sum_{n'\in\mathbb{Z}}|2^{j/2}\widehat{\psi_j}(2^jn'+m)|^{2(1-\delta)}\leqslant 2C_1+\sum_{\substack{n'\in\mathbb{Z}\\ n'\neq0\\ n'\neq-1}}C_2^{2(1-\delta)}\Big(\frac{1}{|n'+2^{-j}m|}\Big)^{2(1-\delta)(\frac{1}{2}+\varepsilon)}.\qquad(2.15)$$

При выбранном δ верно неравенство $2(1-\delta)(\frac{1}{2}+\varepsilon)>1$, следовательно ряд в правой части (2.15) сходится, и его сумма равномерно ограничена по j и по m.
Вынесем соответствующую константу C' за пределы суммы и, просуммировав (2.14) по j, получим:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{2^j-1}|\langle f,\psi_{jk}\rangle|^2\leqslant C'\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{m=0}^{2^j-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(2^jn+m)|^2|2^{j/2}\widehat{\psi_j}(2^jn+m)|^{2\delta}=$$

$$=C'\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(l)|^2|2^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)|^{2\delta}\leqslant C'\sup_{l\in\mathbb{Z}}(\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}|2^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)|^{2\delta})\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(l)|^2\qquad(2.16)$$

Рассмотрим выражение под знаком супремума. Пусть $|l|\in[2^{j_0},2^{j_0+1}-1]$. Разобьём сумму на две и применим для них разные оценки из (2.13):

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}|2^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)|^{2\delta}=\sum_{\substack{j\leqslant j_0\\ j\geqslant0}}|2^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)|^{2\delta}+\sum_{j>j_0}|2^{j/2}\widehat{\psi_j}(l)|^{2\delta}\leqslant$$

$$\leqslant C_2^{2\delta}\sum_{\substack{j\leqslant j_0\\ j\geqslant0}}\Big(\frac{2^j}{2^{j_0}}\Big)^{2\delta(\frac{1}{2}+\varepsilon)}+C_3^{2\delta}\sum_{j>j_0}\Big(\frac{2^{j_0+1}}{2^j}\Big)^{2\delta\alpha}\leqslant C_2^{2\delta}\sum_{j=-\infty}^{0}\Big(\frac{1}{2^j}\Big)^{2\delta(\frac{1}{2}+\varepsilon)}+C_3^{2\delta}\sum_{j=-\infty}^{0}\Big(\frac{1}{2^j}\Big)^{2\delta\alpha}$$

Оба этих показательных ряда сходятся, и их суммы равномерно ограничены по l.
Итак, осталось лишь воспользоваться равенством Парсеваля в (2.16). Мы показали, что

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{2^j-1}|\langle f,\psi_{jk}\rangle|^2\leqslant C'C''\|f\|^2,$$

что и означает бесселевость системы $\{\psi_{jk}\}_{j,k}$. $\square$

Следующая теорема даёт более конкретный нетривиальный пример системы функций, удовлетворяющей условиям теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть дана последовательность тригонометрических полиномов* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$*, удовлетворяющая условиям:*

$$\begin{cases} \widehat{\varphi_0}(0) \neq 0; \\ A \leqslant |2^{j/2}\widehat{\varphi_j}(k)| \leqslant B, \quad k \in [-2^{j-1}+1; 2^{j-1}],\ j \geqslant 1,\ A, B > 0; \\ \widehat{\varphi_j}(k) = 0, \quad k \notin [-2^{j-1}+1; 2^{j-1}],\ j \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.17}$$

Тогда:

1) $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ *образует масштабирующую последовательность.*

2) *Существует* $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$*, биортогональная с* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$*, удовлетворяющая условиям (2.17) с соответствующими константами* $\widetilde{A}$*,* $\widetilde{B}$*.*

3) *Системы* $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}\}_{j,k}$ *и* $\{\widetilde{\varphi}_0\} \cup \{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$*, порождённые парой* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ *и* $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$*, являются базисами Рисса в* $L_2(\mathbb{T})$*.*

Доказательство.

1) Выполнение условий **Ф1-Ф3** для последовательности $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ очевидно. Далее, заметим, что числа γ_k^j и μ_k^j на периоде определяются автоматически по заданным $\widehat{\varphi_j}(k)$ и могут быть периодически продолжены на $\mathbb{Z}$, что и обеспечивает выполнение условий **Ф4** и **Ф5**.

2) Положим

$$\forall j \quad \widehat{\widetilde{\varphi}_j}(k) = \begin{cases} \dfrac{2^{-j}}{\overline{\widehat{\varphi_j}(k)}}, & k \in [-2^{j-1}+1; 2^{j-1}], \\ 0, & k \notin [-2^{j-1}+1; 2^{j-1}]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что последовательность $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2.17) с константами $\widetilde{A} = \frac{1}{B}$ и $\widetilde{B} = \frac{1}{A}$, а значит $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ также является масштабирующей последовательностью. Теперь, рассмотрим условие биортогональности для систем $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$. Если заметить, что в сумме в (1.3) при заданных $\widetilde{\varphi}_j$ остаётся лишь одно слагаемое при любых $j \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, выполнение самого равенства становится очевидным. Покажем, что из выполнения условия биортогональности следует выполнение условия (2.8) теоремы 1. Выпишем условие биортогональности, воспользуемся масштабирующим уравнением **Ф5**, разобьём полученную сумму на две – по чётным и нечётным индексам:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi_j}(2^j n + m)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(2^j n + m)} = 2^{-j}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu_{2^j n+m}^{j+1}\widehat{\varphi_{j+1}}(2^j n + m)\overline{\widetilde{\mu}_{2^j n+m}^{j+1}\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(2^j n + m)} = 2^{-j}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu^{j+1}_{2^{j+1}n+m}\widehat{\varphi_{j+1}}(2^{j+1}n+m)\overline{\widetilde{\mu}^{j+1}_{2^{j+1}n+m}\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(2^{j+1}n+m)}+$$

$$+\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu^{j+1}_{2^{j+1}n+m+2^j}\widehat{\varphi_{j+1}}(2^{j+1}n+m+2^j)\overline{\widetilde{\mu}^{j+1}_{2^{j+1}n+m+2^j}\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(2^{j+1}n+m+2^j)} = 2^{-j}$$

$$\mu^{j+1}_m\widetilde{\mu}^{j+1}_m\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi_{j+1}}(2^{j+1}n+m)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(2^{j+1}n+m)}\Big)+$$

$$+\mu^{j+1}_{m+2^j}\widetilde{\mu}^{j+1}_{m+2^j}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi_{j+1}}(2^{j+1}n+m)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}_{j+1}}(2^{j+1}n+m)}\Big) = 2^{-j-1}(\mu^{j+1}_m\widetilde{\mu}^{j+1}_m+\mu^{j+1}_{m+2^j}\widetilde{\mu}^{j+1}_{m+2^j}) = 2^{-j}.$$

Отсюда следует, что $\forall j, m\ \mu^{j+1}_m\widetilde{\mu}^{j+1}_m+\mu^{j+1}_{m+2^j}\widetilde{\mu}^{j+1}_{m+2^j} = 2$, что и требовалось.
Также отметим, что в статье [3, §5] доказано, что из биортогональности $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$ следует биортогональность порождённых ими систем $\{\psi_{jk}\}_{j,k}$, $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$.
3) Рассмотрим системы $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$, порождённые парой $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ и $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$. Отметим, что бесселевость системы $\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ равносильна бесселевости системы $\{\varphi_0\}\cup\{\psi_{jk}\}_{j,k}$ (аналогично для $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\}\cup\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$). Для доказательства бесселевости $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$ нам нужно доказать, что

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\sum_{k=0}^{2^j-1}|\langle f,\psi_{jk}\rangle|^2 \leqslant C\|f\|^2.$$

Применим лемму 1:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}|\langle f,\psi_{jk}\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^j-1}|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(2^jn+m)2^{j/2}\overline{\widehat{\psi_j}(2^jn+m)}|^2. \tag{2.18}$$

Для наглядности изобразим несколько первых уровней коэффициентов μ^j_k, $\widetilde{\mu}^j_k$ и $\mu^j_{k+2^{j-1}}$, $\widetilde{\mu}^j_{k+2^{j-1}}$, то есть чисел, которые, согласно формулам (2.9), (2.10), участвуют в формировании $\widehat{\psi_j}$, $\widehat{\widetilde{\psi}_j}$. Также напомним, что числа μ^j_k, $\widetilde{\mu}^j_k$ определяются из уже заданных $\widehat{\varphi_j}(k)$, $\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(k)$.

Рисунок 1. Ненулевые значения $\widehat{\varphi_j}(k)$, $\widehat{\widetilde{\varphi}_j}(k)$ на первых четырёх уровнях.

$j \backslash k$	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	–	–	–	–	–	–	–	•	–	–	–	–	–	–	–	–
1	–	–	–	–	–	–	–	•	•	–	–	–	–	–	–	–
2	–	–	–	–	–	–	•	•	•	•	–	–	–	–	–	–
3	–	–	–	–	•	•	•	•	•	•	•	•	–	–	–	–

Рисунок 2. Нулевые и ненулевые значения μ_k^j, $\widetilde{\mu}_k^j$ на периоде (изображённые последовательности продолжаются периодически на $\mathbb{Z}$).

j \ k	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	–	–	–	–	–	–	–	•	⊖	–	–	–	–	–	–	–
2	–	–	–	–	–	–	⊖	•	•	⊖	–	–	–	–	–	–
3	–	–	–	–	⊖	⊖	•	•	•	•	⊖	⊖	–	–	–	–
4	⊖	⊖	⊖	⊖	•	•	•	•	•	•	•	•	⊖	⊖	⊖	⊖

Рисунок 3. Нулевые и ненулевые значения $\mu_{k+2^{j-1}}^j$, $\widetilde{\mu}_{k+2^{j-1}}^j$ на периоде (изображённые последовательности продолжаются периодически на $\mathbb{Z}$).

j \ k	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	–	–	–	–	–	–	–	⊖	•	–	–	–	–	–	–	–
2	–	–	–	–	–	–	•	⊖	⊖	•	–	–	–	–	–	–
3	–	–	–	–	•	•	⊖	⊖	⊖	⊖	•	•	–	–	–	–
4	•	•	•	•	⊖	⊖	⊖	⊖	⊖	⊖	⊖	⊖	•	•	•	•

Из рисунков 1-3 становится понятна закономерность в формировании масок $\mu_{k+2^{j-1}}^j$, $\widetilde{\mu}_{k+2^{j-1}}^j$. Введём обозначение

$$K_j := \{k \in \mathbb{Z} : \widehat{\psi_j}(k) \neq 0\}.$$

Из формул (2.9), (2.10) и рисунков выше видно, что $K_j \cap K_i = \emptyset$, $j \neq i$, и $\bigcup_{j=0}^{\infty} K_j = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Из этого следует, что в правой части уравнения (2.18) слагаемые с множителем $\widehat{f}(k)$ войдут в общую сумму лишь по одному разу для каждого k (кроме $k = 0$). Из условий (2.17) и способа задания $\widehat{\widetilde{\varphi}_j}$ следует равномерная по j ограниченность сверху масок μ_k^j, $\widetilde{\mu}_k^j$, а следовательно, из формул (2.9), (2.10) получаем, что

$$\forall k \quad |2^{j/2}\widehat{\psi_j}(k)|, |2^{j/2}\widehat{\widetilde{\psi}_j}(k)| \leqslant C.$$

Используя эти рассуждения, для (2.18) получаем:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} |\langle f, \psi_{jk}\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^j-1} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j n + m) 2^{j/2}\overline{\widehat{\psi_j}(2^j n + m)}|^2 \leqslant C^2 \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant C^2 \|f\|^2.$$

Таким образом, мы получили бесселевость системы $\{\psi_{jk}\}_{j,k}$. Бесселевость $\{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$ доказывается аналогично.

Таким образом, мы получили выполнение всех условий теоремы 1, и следовательно, системы $\{\varphi_0\} \cup \{\psi_{jk}\}_{j,k}$ и $\{\widetilde{\varphi}_0\} \cup \{\widetilde{\psi}_{jk}\}_{j,k}$ являются двойственными фреймами. Значит, согласно утверждению 2, каждая из них является базисом Рисса. $\square$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю М. А. Скопиной за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

[1] Кривошеин А., Протасов В., Скопина М., Multivariate Wavelet Frames. Springer Singapore, 2016. P. 182.

[2] Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А., Теория всплесков, Физматлит, М., (2005).

[3] Скопина М., Multiresolution analysis of periodic functions. East Journal On Approximations, Volume 3, Number 2 (1997), 203-224.

[4] Daubechies I., Ten lectures on Wavelets, CBMS-NSR Series in Appl. Math., SIAM, 1992.

[5] Meyer Y., Ondolettes, Herman, Paris, 1990.

[6] Chui C. K., Mhaskar H. N., On trigonometric wavelets, Constr. Approx. 9, 2-3 (1993), 167-190.

[7] Chui C. K., Wang J. Z., A general framework of compact supported splines and wavelets, J. Approx. Theory 71 (1992), 263-304.

[8] Petukhov A. P., Periodic wavelets, Mat. Sb., 188:10 (1997), 69–94.

[9] Goh S. S., Han B., Shen Z., Tight periodic wavelet frames and approximation orders, Applied and Computational Harmonic Analysis, Volume 31, Issue 2, September 2011, Pages 228-248

[10] Lebedeva E. A., On a connection between nonstationary and periodic wavelets, Journal of Mathematical Analysis and Applications, JMAA-16-2549

[11] Koh Y. W., Lee S. L., Tan H. H., Periodic Orthogonal Splines and Wavelets, Applied and Computational Harmonic Analysis, Volume 2, Issue 3, July 1995, Pages 201-218.